

Série 5 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Application linéaire, injectivité, surjectivité, bijectivité, composition d'applications linéaires, calcul matriciel*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Dans les cas suivants, écrire la matrice canonique correspondant à la transformation, et déterminer si la transformation est injective, surjective ou bijective.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

f) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Sol.:

- a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, injective (les colonnes sont linéairement indépendantes). Non surjective, car seulement deux vecteurs ne peuvent engendrer \mathbb{R}^3 . Donc non bijective.

- b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, surjective (l'image est \mathbb{R}), non injective (plus de colonnes que de lignes).
Donc non bijective.
- c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective (en permutant les lignes 1 et 3, on trouve la matrice identité).
- d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, rien (non injective car $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est envoyé sur zéro, et non surjective, car les vecteurs de l'image satisfont $x_1 = x_2$).
- e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, injective, surjective et bijective.
- f) T n'est pas une transformation linéaire, il est impossible de la représenter canoniquement par une matrice.

Exercice 2

L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x - 5y + 7z, 3x - y - 2z, y + 3z)$$

est injective mais pas surjective

est bijective

est surjective mais pas injective

n'est ni surjective ni injective

Sol.: est injective mais pas surjective

Exercice 3

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

- a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$
 b) $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$

Sol.:

a) $AB = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}, AC$ n'existe pas : $(2 \times 3) \times (2 \times 2)$, $CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix},$
 $BC = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}, CB$ n'existe pas : $(2 \times 2) \times (3 \times 2)$, CD n'existe pas : $(2 \times 2) \times (3 \times 1)$,
 $EC = \begin{pmatrix} 9 & 15 \end{pmatrix}, EA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$

b) $AA^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, BA^T n'existe pas : $(3 \times 2) \times (3 \times 2)$, $BC^T = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 10 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$, $C^T A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, BD^T n'existe pas : $(3 \times 2) \times (1 \times 3)$, $D^T B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-ce que $AB = BA$?

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) Oui. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : A est la matrice identité, elle commute avec n'importe quelle matrice.

b) Non. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. (Idée : écrire AB sous la forme $(A \vec{b}_1 \quad A \vec{b}_2)$)

b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?

d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

Sol.:

a) On note \vec{b}_1 et \vec{b}_2 les colonnes de B : $B = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)$. On a $AB = (A \vec{b}_1 \quad A \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, on doit chercher un vecteur non nul \vec{b}_1 tel que $A \vec{b}_1 = \vec{0}$. Si un tel vecteur existe, on peut poser par exemple $B = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2)$ avec $\vec{b}_2 = \vec{0}$. Sinon, une telle matrice B n'existe pas.

Soit $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Le système $A \vec{b}_1 = \vec{0}$ est linéaire en x_1 et x_2 avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, dont la forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la solution générale est $x_1 = -2x_2$, c'est-à-dire, sous forme vectorielle $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$.

Ainsi, (en fixant $x_2 = 1$) on trouve un vecteur $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tel que $A\vec{b}_1 = \vec{0}$. On peut donc proposer la matrice $B = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) En résolvant $A\vec{b}_1 = \vec{0}$ pour $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ on obtient un système linéaire avec pour matrice augmentée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. La forme échelonnée réduite est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Par conséquent, le système a une unique solution triviale $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la matrice B telle que $AB = 0$ n'existe pas.

c) On calcule $AB = \begin{pmatrix} 1 & 12-4k \\ -30 & -20+k \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & -24 \\ 15-5k & -20+k \end{pmatrix}$. L'équation $AB = BA$ équivaut donc au système

$$\begin{cases} 12-4k = -24 \\ -30 = 15-5k, \end{cases}$$

avec pour unique solution $k = 9$.

d) Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Calculer les produits matriciels suivants, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires, avec les dimensions des espaces, $T_{AB} : \mathbb{R}^{\dots} \xrightarrow{T_{\dots}} \mathbb{R}^{\dots} \xrightarrow{T_{\dots}} \mathbb{R}^{\dots}$.

a) AB , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) ABC , où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Sol.:

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $T_{AB} : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^3$.

b) $ABC = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$, $\vec{T}_{ABC} : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_C} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^2$.

c) $ABC = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $T_{ABC} : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_C} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T_B} \mathbb{R} \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^3$.

Exercice 7

Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2 + x_3$.

- Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et T_2 et le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.
- Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est le domaine d'arrivée?

Sol.:

a) $T_1(e_1) = T_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi la composition $T_2 \circ T_1$ correspond à $A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- b) On a $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Le domaine de définition est \mathbb{R}^2 . Le domaine d'arrivée est \mathbb{R} .

Exercice 8

- a) On se donne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on $AB = BA$?

- b) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que $MN = MT$, bien que N soit différent de T .

Sol.:

- On a $AB = BA$ pour $k = 9$ seulement. On voit que c'est une condition nécessaire en calculant les coefficients (1, 2) des deux matrices. On trouve respectivement $12 - 4k$ et -24 . On s'assure ensuite que les autres coefficients sont égaux pour ce choix de k .

- On calcule les deux produits matriciels MN et NT . On trouve dans les deux cas $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 21 & -6 \end{pmatrix}$.

Ceci donne un nouvel exemple de l'impossibilité de simplifier un produit matriciel en "divisant par M ", le problème étant bien sûr qu'on ne peut pas diviser par une matrice (en général).

Exercice 9

Ceci est un autre exercice de base concernant les produits matriciels, pour nous assurer que la différence entre $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{u} \vec{v}^T$ est bien claire.

On peut considérer tout vecteur de \mathbb{R}^n comme une matrice de dimension $n \times 1$. Soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de \mathbb{R}^3 :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On appelle $\vec{u}^T \vec{v}$ produit scalaire (ou produit intérieur) des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

- Ecrire \vec{u}^T et \vec{v}^T .
- Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u}^T \vec{v}$ et $\vec{v}^T \vec{u}$?
- Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Le produit $\vec{u} \vec{v}^T$ est appelé produit extérieur.

- Quelle est la taille des deux matrices produits $\vec{u} \vec{v}^T$ et $\vec{v} \vec{u}^T$?
- Ces deux produits sont-ils égaux ? Pourquoi ?

Sol.:

- $\vec{u}^T = (a \ b \ c)$ et $\vec{v}^T = (1 \ 2 \ 3)$.
- La matrice \vec{u}^T est une matrice 1×3 et la matrice \vec{v} est une matrice 3×1 . La taille du produit $\vec{u}^T \vec{v}$ est donc 1×1 . Même chose pour la taille du produit $\vec{v}^T \vec{u}$.
- Ces deux produits sont transposés l'un de l'autre, comme ils sont de taille 1×1 , ils sont égaux.
- La matrice \vec{u} est une matrice 3×1 et la matrice \vec{v}^T est une matrice 1×3 . La dimension du produit $\vec{u} \vec{v}^T$ est donc 3×3 . Même chose pour la dimension du produit $\vec{v} \vec{u}^T$.
- Non. Les produits sont transposés l'un de l'autre, mais ici on a des matrices 3×3 . En général une matrice n'est pas égale à sa transposée. Pour le démontrer, le plus simple est de donner un contre-exemple concret. On peut choisir par exemple $a = 1, b = c = 0$. Les deux matrices 3×3 sont alors distinctes.

Exercice 10

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- Si A et B sont deux matrices de taille 2×2 dont les colonnes sont désignées par \vec{a}_1, \vec{a}_2 et \vec{b}_1, \vec{b}_2 , alors $AB = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{pmatrix}$.
- Soient A, B et C trois matrices de taille 3×3 . Alors $AB + AC = (B + C)A$.
- Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$. Alors $A^T + B^T = (A + B)^T$.
- La transposée d'un produit de matrices est égale au produit de leurs transposées dans le même ordre.

Sol.:

- Faux. D'après les règles du calcul matriciel, le produit de deux matrices 2×2 est encore une matrice 2×2 or ici $\begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (de taille 1×2).
- Faux. La bonne formule est $AB + AC = A(B + C)$.

- c) Vrai. Plus généralement, si A et B sont deux matrices de taille $n \times n$, alors $A^T + B^T = (A + B)^T$. En effet, le coefficient (i, j) de la matrice $(A + B)^T$ est égal au coefficient (j, i) de la matrice $A + B$ qui est $a_{ji} + b_{ji}$ et qui est aussi égal au coefficient (i, j) de la matrice $A^T + B^T$.
- d) Faux. La formule correcte est $(AB)^T = B^T A^T$ vue à l'exercice ??.

On peut trouver facilement un contre-exemple à l'assertion proposée avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule et on trouve $(AB)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tandis que nous avons $A^T B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

- a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.
- b) Le produit matriciel est commutatif.
- c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

Sol.:

- a) Vrai. C'est la définition du produit matriciel.
- b) Faux. Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule et on trouve $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tandis que $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $AB \neq BA$.
- c) Faux. Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$. On a que $A^2 = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais $A \neq 0$ (c'est-à-dire A n'est pas la matrice nulle).
- d) Vrai. Cela découle de la formule $(AB)^T = B^T A^T$ vue à l'exercice ?? et de l'associativité du produit matriciel. En effet $(ABC)^T = ((AB)C)^T = C^T (AB)^T = C^T B^T A^T$.

Exercices additionnels

Exercice 12

Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation linéaire. Montrer qu'une condition nécessaire pour que T soit bijective est $n = m$.

Sol.:

Supposons T bijective. Considérons A la matrice canonique associée à T . Comme T est surjective (l'image de T recouvre tout \mathbb{R}^m), l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, et les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^m , ainsi on a $n \geq m$. Comme T est injective, l'équation $A\vec{x} = \vec{0}$

possède uniquement la solution triviale, ce qui signifie que les colonnes de A sont linéairement indépendantes. Ceci implique $n \leq m$. On a donc $n = m$.

Exercice 13

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.

Sol.: Le produit AB est bien défini, le nombre m de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B . En transposant, le nombre de lignes de A^T est égal au nombre de colonnes de B^T , donc le produit $B^T A^T$ est également bien défini. On note $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ et on compare les éléments d'indice ij des matrices $(AB)^T$ et $B^T A^T$:

$$\left((AB)^T \right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki},$$

$$\left(B^T A^T \right)_{ij} = \sum_{k=1}^m (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^m b_{ki} a_{jk},$$

on obtient les mêmes quantités, ainsi $(AB)^T = B^T A^T$.

Exercice 14

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$. Montrer

- a) T_A est injective $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque colonne.
- b) T_A est surjective $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque ligne.

Préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n .

Sol.:

- (a) T_A injective $\Leftrightarrow T_A(\vec{x}) = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ n'a pas de variable libre
 $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque colonne.
- (b) T_A surjective $\Leftrightarrow T_A(\vec{x}) = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ a une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
 $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$
 $\Leftrightarrow A$ a une position pivot dans chaque ligne.

Pour répondre à la deuxième question, nous observons que pour la matrice A on a

$$\text{nombre de positions pivot} \leq \min\{m, n\},$$

comme le nombre maximal de positions pivot est atteint si chaque élément diagonal a_{ii} de la matrice A (de taille $m \times n$) est une position pivot. Alors,

- (a) on a déduit que T_A est injective si et seulement si A a n positions pivot. Donc, il est nécessaire que $n \leq m$.
- (b) on a déduit que T_A est surjective si et seulement si A a m positions pivot. Donc, il est nécessaire que $m \leq n$.

On retrouve au passage que nécessairement $n = m$ lorsque T_A est bijective.

Exercice 15

On se donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si elles sont définies, calculer les matrices :

$$AB, CA, CD, DC, A^T A, AA^T.$$

Si elles ne sont pas définies, expliquer pourquoi.

Sol.:

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 28 \\ -21 & -4 \\ -9 & -4 \end{pmatrix},$$

CA n'est pas définie car on ne peut pas multiplier une matrice 2×1 par une matrice 3×2 ,

$$CD = \begin{pmatrix} 56 & 14 \\ -24 & -6 \end{pmatrix}, \quad DC = [50],$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 51 & -7 \\ -7 & 29 \end{pmatrix}, \quad AA^T = \begin{pmatrix} 49 & -7 & -7 \\ -7 & 26 & 11 \\ -7 & 11 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16

On définit une application $T : M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6$ par $T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}$.

Montrer que T est linéaire, injective et surjective.

Sol.: Cet exercice ne demande probablement aucun éclaircissement puisque l'application T consiste en un réarrangement de la matrice 2×3 en une matrice 6×1 . La somme et l'action se correspondent parfaitement, elles s'obtiennent coefficient par coefficient.

Exercice 17

Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer qu'en général $(A + B)(A - B) \neq 0$.

Est-ce qu'il y a des cas où l'égalité peut être vraie ?

Sol.:

On a

$$(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2.$$

Par hypothèse les matrices A et B sont deux matrices nilpotentes avec un indice de nilpotence 2, donc

$$(A + B)(A - B) = BA - AB.$$

En général pour deux matrices quelconques $AB \neq BA$, et l'affirmation est fausse. Il n'y a que dans la situation où $AB = BA$, c'est à dire dans le cas où les deux matrices commutent, que l'affirmation est vraie. Par exemple avec les deux matrices ci-dessous on a $A^2 = B^2 = 0$ mais $AB \neq BA$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$